теңсіздігінің орындалуы мен F(-π)=F(π) шартын қанағаттандыратын [-π , π] сегментінде үзіліссіз F(x) функциясының табылатынын байқаймыз. Шынында да, F(x) функциясын $f(x)$ функциясына, оның үзіліссіз нүктелерінде тең, ал үзіліс нүктелері мен $x=\pi$ нүктесінің жеткілікті кішкене маңайында сызықтық функция етіп, яғни F(x) функциясын бүкіл [-π , π] кесіндісінде үзіліссіз және F(-π)=F(π) шартын қанағаттандыратын етіп алу жеткілікті.

Сонда құрама-үзіліссіз функция мен оны кесуші сызықтық функция шектеулі болғандықтан $f(x)$ функциясының үзіліс нүктелері мен $x=\pi$ нүктесінің жоғарыда көрсетілген маңайын жеткілікті кішкене етіп алып, біз (35) теңсіздіктің орындалуын қамтамасыз ете аламыз.

Ал (1-теорема) бойынша F(x) функциясы үшін [-π , π] кесіндісінде

$$|F(x)-T(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2\pi} \qquad (36)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын T(x) тригонометриялық көпмүшелігі табылады. Сонда бұдан

$$\|F(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[F(x)-T(x)]^2dx}\le\frac{\varepsilon}{2} \qquad (37)$$

Енді (35) және (37) теңсіздіктерінен

$$\|f(x)-T(x)\|\le\|f(x)-F(x)\|+\|F(x)-T(x)\|<\varepsilon$$

(34) теңсіздік шығады. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Осы теорема мен 3-теорема (§2) (11) тригонометриялық жүйенің толықтығы шығады. Ал бұдан $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\}$, n=1,2,…, жүйесінің [0 , π] сегментінде (немесе [-π,0] сегментінде) құрама-үзіліссіз функциялар жиынында толық екені шығады.

Шынында да, [0, π] кесіндісінде құрама – үзіліссіз және осы кесіндіде $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\}$ жүйесінің барлық элементтеріне ортогональ болады. Ал (11) толық болғандықтан, бұл функция [-π, π] кесіндісінде нөлге тең, демек, [0, π] кесіндісінде нөлге тең.

Дәл осылай $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$, n=1,2,…,

жүйесі де [0 , π] кесіндісінде барлық құрама-үзіліссіз функциялар жиынында толық. Бұл тұжырым [-π, 0] кесіндісі үшін де дұрыс.

Әдебиеттер: [1], 194-200 б.

№23 ДӘРІС. ПЕРИОДЫ 2П ФУНКЦИЯНЫҢ ФУРЬЕ ҚАТАРЫ.

Дәрістің мақсаты: Функцияның тригонометриялық қатарға жіктелуін, ортогональ функциялардың қасиеттерін пайдаланып, Эйлер-Фурье коэффициенттерін таба білу.

1-тұжырым. [-π, π] кесіндісінде құрама-үзіліссіз кез келген $f(x)$ функциясы үшін

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \qquad (38)$$

Парсеваль теңдігі орынды.

Дәлелдеу. (11) тригонометриялық жүйе тұйық болғандықтан 1-теорема бойынша [-π , π] кесіндісінде құрама-үзіліссіз кеңістігінің кез келген $f(x)$ функциясы үшін

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

Бессель теңсіздігі (38) Парсеваль теңдігіне көшеді.

2-Тұжырым. [-π, π] кесіндісінде кез келген құрама-үзіліссіз $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатары осы функцияға бұл кесіндіде орташа жинақталады.

Дәлелдеуі. 2-теорема мен оның ескертуінде көрсетілген.

3-Тұжырым. [-π, π] кесіндісінде кез келген құрама-үзіліссіз $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатарын осы кесіндіде мүшелеп интегралдауға болады.

Дәлелдеуі. Өйткені $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатарының $T_n(x)$ дербес тригонометриялық көпмшеліктері 2-тұжырым бойынша осы функцияға бұл кесінді де орташа жинақталады. Ал ондай $\{T_n(x)\}$ тізбегін [-π,π] кесіндісінде мүшелеп интегралдауға болатынын функциялық тізбектер теориясынан білеміз, яғни

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx)dx$$

4-Тұжырым. Егер [-π, π] кесіндісінде $f(x)$ және g(x) екі құрама – үзіліссіз функцияларының Фурье тригонометриялық қатарлары бірдей болса, онда $f(x)$ және g(x) функциялары [-π , π] кесіндісінде тең.

5-Тұжырым. Егер [-π, π] кесіндісінде кез келген құрама-үзіліссіз $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатары [-π, π] кесіндісінде жататын [a, b] кесіндісінде бірқалыпты жинақты болса, онда ол [a, b] кесіндісінде дәл осы $f(x)$ функциясына жинақталады.

Дәлелдеу. Айталық $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатарының [a, b] кесіндісінде бірқалыпты жинақталатын функциясы F(x) болсын деп ұйғарайық. Біз [a, b] кесіндісінде F(x)=$f(x)$ екенін дәлелдеуіміз керек. Ал бірқалыпты жинақтылықтан орташа жинақтылықтың шығатындығынан $f(x)$ функциясының Фурье тригонометриялық қатары F(x) функциясына [a, b] кесіндісінде орташа жинақталады, яғни ∀ε>0 ∃N ∀n>N үшін Фурье тригонометриялық қатарының $T_n(x)$ дербес қосындысы

$$\|F(x)-T_n(x)\|=\sqrt{\int_a^b[F(x)-T_n(x)]^2dx}<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (39)$$

теңсіздігін қанағаттандырады.

Екінші жағынан, 2- тұжырым бойынша $T_n(x)$ тізбегі $f(x)$ функциясына бүкіл [-π, π] кесіндісінде орташа жинақталады, демек, [a, b] кесіндісінде. Сондықтан да ∀ε>0 ∃N_1 ∀n>N_1 үшін

$$||T_n(x) - f(x)||=\sqrt{\int_a^b [T_n(x)-f(x)]^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (40)$$

Сонда (39) бен (40) және үшбұрыш теңсіздігінен
$||F(x)-f(x)|| \le ||f(x)-T_n(x)|| + ||T_n(x)-f(x)|| < \varepsilon$ теңсіздігін аламыз. Мұны мен ε-нің кез келген болғандықтан $||F(x)-f(x)||=0$, яғни $F(x)=f(x)$ $\forall x \in [a, b]$.
Ескерту. $[a, b]$ кесіндісінің $[-\pi, \pi]$ кесіндісімен бірдей болуы да мүмкін.

Әдебиеттер: [1], 201-204 б., [2].

№24-25 ДӘРІС. ЖҰП ЖӘНЕ ТАҚ ФУНКЦИЯЛАР. СИНУСТАР НЕ КОСИНУСТАР БОЙЫНША ФУРЬЕ ҚАТАРЛАРЫ.

Дәрістің мақсаты: Жұп және тақ функциялардың анықтамаларын білу. Жұп және тақ функциялар үшін Фурье қатарының коэффициенттерін таба білу. Мұндай функциялардың синустар немеес косинустар бойынша Фурье қатарын анықтай білу.

Егер бүкіл ОХ осінде анықталған функция $f(x)$ үшін координаталар басына симметриялы орналасқан кез келген кесіндісінде $f(x)=f(-x)$ теңдігі орындалса – жұп, ал $f(x)=-f(-x)$ теңдігі орындалса – тақ функция деп аталатыны белгілі.

Жұп функция үшін

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(-x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(-x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=$$

$$=-\int_{\pi}^{0} f(u)du+\int_{0}^{\pi} f(u)du=\int_{0}^{\pi} f(u)du+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$